Известия Томского политехнического университета. 2003. Т. 306. №2

Естественные науки

УДК 519.714.2

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЕ НАБЛЮДЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ АНОМАЛЬНЫХ ПОМЕХ

Н.С. Демин*, С.В. Рожкова**, О.В. Рожкова**

*Томский государственный университет, **Томский политехнический университет
E-mail: svrhm@mail2000.ru

Исследуются свойства фильтра-интерполятора-экстраполятора, синтез которого осуществлен в [1], касающиеся оптимальности процедуры исключения аномальных компонент вектора наблюдения, зависимости точности оценивания от размерности вектора аномальных помех и структуры воздействия его компонент на компоненты вектора наблюдений.

1. Введение

В [1] на основе анализа научных публикаций была поставлена и решена задача синтеза оптимального в среднеквадратическом смысле несмещенного фильтра-интерполятора-экстраполятора (далее ФИЭ) в случае непрерывно-дискретных каналов наблюдения с памятью произвольной кратности, когда экстраполяция осуществляется одновременно в произвольном числе будущих моментов времени, а в дискретном канале наблюдения действуют аномальные помехи. В результате рассмотрения крайних ситуаций отсутствия аномальных помех, либо их воздействия по всем компонентам вектора наблюдений, а также содержательного примера, была заявлена необходимость исследования вопросов зависимости точности оценивания от количества аномальных каналов наблюдения и структуры воздействия компонент вектора аномальных помех ξ_τ, ζ_τ, $h(\tau_\mu)$, вектора наблюдений. Модели процессов система обозначений те же, что и в [1].

2. Оптимальность процедуры исключения аномальных наблюдений

Пуст… $(\theta-\rho)$ … дискретных наблюден… $\overline{\eta}(t_m)$ размера $(\theta-\rho)$ получается из вектора $\eta(t_m)$ … тем исключения компонент с номерами $i_1, i_2, \cdots, i_r$ … $\overline{\Gamma}_0(\tau_\mu)$, о… $\overline{\Gamma}_\kappa(\tau_\mu)$, ст… $\kappa=\overline{1;N}$, м… $\overline{\Gamma}_{N+\Lambda+1}(\tau_\mu)$ …ехи. Пусть … $[(\theta-\rho)\times\nu]$, $[(q-r)\times n]$ … в … $[(q-r)\times(N+L+1)n]$ … $\Gamma_0(\tau_\mu)$, $\Gamma_\kappa(\tau_\mu)$, $\Gamma_{N+\Lambda+1}(\tau_\mu)$ …получаются из матриц … исключением строк … $\iota_1, \iota_2, \cdots, \iota_\rho$, а матрица $\overline{\varsigma}(\tau_\mu)$ …мера $[(\theta-\rho)\times(\theta-\rho)]$ получается из матрицы $\varsigma(\tau_\mu)$ исключением строк и столбцов с указанными номерами. Тогда оптимальный в среднеквадратическом смысле ФИЭ, в котором используется вектор наблюдений $\overline{\eta}(t_m)$, будем называть усеченным.

…ние 1. Усеченный ФИЭ на интервалах $\tau_\mu \le \tau < \tau_{\mu+1}$ определяется для

$$\overline{\mu}(t),\ \overline{\mu}(\tau_k,t),\ \overline{\mu}(s_l,t),\ \overline{\Gamma}(t),\ \overline{\Gamma}_{kk}(\tau_k,t),$$

$$\overline{\Gamma}_{0k}(\tau_k,t),\ \overline{\Gamma}_{ki}(\tau_i,\tau_k,t),\ \overline{\Gamma}^{ll}(s_l,t),$$

$$\overline{\Gamma}^{jl}(s_j,s_l,t),\ \overline{\Gamma}^{\lambda}_{0,N+1}(\sigma_\lambda,\tau),\ \overline{\Gamma}^{\lambda}_{\kappa,N+1}(\sigma_\lambda,t_\kappa,\tau)$$

уравнениями (2.1–2.11) теоремы 1 из [1] с начальными условиями, кот… $\eta(t_m)$, … $\tilde{\eta}(t_m)$, … $G_0(t_m)$, …в $\Gamma_\kappa(\tau_\mu)$ [2… $\varsigma(\tau_\mu)$ …орых … $h(\tau_\mu)$, $\tilde{h}(\tau_\mu)$, $\overline{\Gamma}_0(\tau_\mu)$, $\overline{\Gamma}_\kappa(\tau_\mu)$, $\overline{\varsigma}(\tau_\mu)$ …нно на … .

Данное утверждение очевидным образом следует из упомянутых теоремы и следствия.

Теорема 1. ФИЭ, определенный теоремой 1 из [1], и усеченный ФИЭ эквивалентны.

Доказательство. Пусть момент τ_μ – первый момент появления аномальной помехи. Это означает, что $\tilde{\mu}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m-0, \tilde{s}_L)$ и $\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m-0, \tilde{s}_L)$ в усеченном фильтре совпадают с соответствующими величинами в ФИЭ из Теоремы 1 в [1]. Тогда

$$\tilde{\overline{\mu}}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L) = \tilde{\mu}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m-0, \tilde{s}_L) + \overline{K}(t_m)\tilde{\overline{\eta}}(t_m),$$

$$\overline{K}(t_m) = \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m-0, \tilde{s}_L) \times \overline{G}^{T}_{N+L+1}(t_m)\overline{W}^{-1}(t_m), \quad (1)$$

$$\tilde{\overline{\eta}}(t_m) = \overline{\eta}(t_m) - \overline{G}_{N+L+1}(t_m) \times \tilde{\mu}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m-0, \tilde{s}_L). \quad (2)$$

Таким образом, из (П.45) в [1] и (1) следует, что доказательство сформулированной Теоремы сводится

к доказательству равенства

$$\bar{K}(t_m)\bar{\eta}(t_m) = \tilde{K}(t_m)\tilde{\eta}(t_m). \quad (3)$$

Введем в рассмотрение булеву матрицу E размера $[(\theta-\rho)\theta]$, которая получается из матрицы □ исключением строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Очевидно, что $\bar{\eta}(t_m) = E\eta(t_m)$, $\bar{G}_{N+L+1}(t_m) = EG_{N+L+1}(t_m)$, $\bar{\tilde{\eta}}(t_m) = E\tilde{\eta}(t_m)$. Следовательно, доказательство упомянутого равенства сводится к доказательству матричного тождества $K(\tau_\mu)E = K(\tau_\mu)$, которое с учетом (2) и (П.46), (П.74) из [1] расписывается в виде:

$$\tilde{\Gamma}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu - 0, \varsigma_\Lambda) \times$$
$$\times \bar{\Gamma}^T_{N+\Lambda+1}(\tau_\mu)\tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu)E =$$
$$= \tilde{\Gamma}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu - 0, \varsigma_\Lambda) \times$$
$$\times \Gamma^T_{N+\Lambda+1}(\tau_\mu)\tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu)\Psi(\tau_\mu).$$

Так как $\bar{\Gamma}_{N+\Lambda+1}(\tau_\mu) = E\Gamma_{N+\Lambda+1}(\tau_\mu)$, $\bar{\varsigma}(\tau_\mu) = E\varsigma(\tau_\mu)E^T$, то $\bar{\Omega}(\tau_\mu) = E\Omega(\tau_\mu)E^T$, и доказательство (4) сводится к доказательству матричного соотношения

$$E^T\left[E\Omega(\tau_\mu)E^T\right]^{-1}E = \tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu)\Psi(\tau_\mu). \quad (4)$$

Использование матричного тождества [3]

$$\left[A + B\Delta B^T\right]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B \times$$
$$\times\left[\Delta^{-1} + B^T A^{-1}B\right]^{-1}B^T A^{-1}$$

с учетом (2.35) из [1] дает, что (5)

$$\tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu) = \Omega^{-1}(\tau_\mu) - \Omega^{-1}(\tau_\mu)X \times$$
$$\times\left[\Theta^{-1}(\tau_\mu) + N(\tau_\mu)\right]^{-1}X^T\Omega^{-1}(\tau_\mu),$$

где $N(\tau_\mu) = X^T\Omega^{-1}(\tau_\mu)X$. Умножая обе части (6) слева на X^T и справа на C, а затем сворачивая правую часть по упомянутому матричному тождеству, получаем

$$X^T\tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu)X = \left[\Theta(\tau_\mu) + N^{-1}(\tau_\mu)\right]^{-1}. \quad (6)$$

Отсюда с учетом (П.70) из [1] следует $\Theta(\tau_\mu) = \tilde{N}^{-1}(\tau_\mu) - N^{-1}(\tau_\mu)$. Умножение обеих частей последнего выражения слева на □ и справа на □ с последующим прибавлением к обеим частям $\Omega(\tau_\mu)$ приводит с учетом (2.35) из [1] к соотношению

$$\tilde{\Omega}(\tau_\mu) = \Omega(\tau_\mu) + X\left[\tilde{N}^{-1}(\tau_\mu) - N^{-1}(\tau_\mu)\right]X^T,$$

откуда следует матричное тождество

$$\tilde{\Omega}(\tau_\mu)\left[\tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu) - \tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu) \times\right.$$
$$\left.\times X\tilde{N}^{-1}(\tau_\mu)X^T\tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu)\right]\tilde{\Omega}(\tau_\mu) =$$
$$= \Omega(\tau_\mu)\left[\Omega^{-1}(\tau_\mu) - \Omega^{-1}(\tau_\mu) \times\right.$$
$$\left.\times XN^{-1}(\tau_\mu)X^T\Omega^{-1}(\tau_\mu)\right]\Omega(\tau_\mu).$$

$\tilde{\Omega}(\tau_\mu)$, $\tilde{\Psi}(\tau_\mu)$ – левая часть (7). Используя для $\tilde{\Psi}(\tau_\mu)$, которые стоят в качестве сомножителей при квадратной скобке слева и справа в $\tilde{\Psi}(\tau_\mu)$, формулу (2.35), а

$$\tilde{\Psi}(\tau_\mu) = \Omega(\tau_\mu) \times$$
$$\times\left[\tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu) - \tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu)X\tilde{N}^{-1}(\tau_\mu)X^T \times\right. \quad (7)$$
$$\left.\times\tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu)\right]\Omega(\tau_\mu).$$

Тогда из (7) следует:

$$\tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu) - \tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu)X\tilde{N}^{-1}(\tau_\mu)X^T\tilde{\Omega}^{-1}(\tau_\mu) =$$
$$= \Omega^{-1}(\tau_\mu) - \Omega^{-1}(\tau_\mu)XN^{-1}(\tau_\mu)X^T\Omega^{-1}(\tau_\mu).$$

Использование (8) в (5) с учетом (П.47), (2.33), (П.70) из [1] приводит к тому, что доказательство (4) сводится к доказательству свойства

$$\Omega(\tau_\mu)E^T\left[E\Omega(\tau_\mu)E^T\right]^{-1}E +$$
$$+ XN^{-1}(\tau_\mu)X^T\Omega^{-1}(\tau_\mu) = I_\theta. \quad (8)$$

Введем

$$A_1 = \Omega(\tau_\mu)E^T\left[E\Omega(\tau_\mu)E^T\right]^{-1}E,$$
$$A_2 = XN^{-1}(\tau_\mu)X^T\Omega^{-1}(\tau_\mu).$$

Для рангов произвольных матриц A и B имеют место свойства [4] (9)

$$\rho\kappa[AB] = \rho\kappa[A^+AB] = \rho\kappa[ABB^+].$$

В результате последовательного применения (10) к □ и □ и того, что для обратимой матрицы $\square^+ = \square^{-1}$, получаем

$$\rho\kappa[A_1] = \rho\kappa\left[E^T\left[E\Omega(\tau_\mu)E^T\right]^{-1}EE^+\right],$$
$$\rho\kappa[A_2] = \rho\kappa\left[X^+X\left[X^T\Omega^{-1}(\tau_\mu)X\right]^{-1}X^T\right]. \quad (10)$$

Так как по построению матрицы E и C являются матрицами соответственно $EE^+ = I_{(\theta-\rho)}$, $X^+X = I_\rho$ ками и столбцами, то [4]. Учитывая $rk[A_1] = rk[E^T] = q - r$, $rk[A_2] = rk[C^T] = r$, получаем $A_2^2 = A_2$, $A_1^2 = A_1$, из определения □ и □ следует, что (11) то есть матрицы □ и □ являются проекционными [5]. Поскольку $A_1A_2 = O$ и $A_2A_1 = O$, имеем $\rho\kappa[A_1] + \rho\kappa[A_2] = \theta$, и, кроме того, $EX = O$. Поскольку проекционные матрицы, удовлетворяющие этим условиям, обладают свойством $A_1 + A_2 = I_\theta$ [4], то это с учетом вида A_1 и A_2 доказывает (9), а тем самым (4). Произвольность

момента τ_μ следует по индукции. Теорема 1 доказана.

Данная теорема дает объяснение нечувствительности ФИЭ из [1] к неточному знанию матрицы интенсивности аномальной помехи (см. теорема 2 в [1]) и означает, что процедура исключения аномальных компонент вектора наблюдений в случае неизвестного математического ожидания аномальной помехи является оптимальной в смысле минимума среднеквадратической ошибки оценки в классе линейных несмещенных ФИЭ вида (П.45) из [1]. Использование в прикладных задачах ФИЭ из [1], а не усеченного ФИЭ предпочтительнее, так как в нем обрабатывается полный $\eta(t_m)$, а не усеченный $\bar{\eta}(t_m)$ вектор наблюдений. Если часть аномальных компонент $\eta(t_m)$ становятся не аномальными, то в структуре ФИЭ это учитывается через изменение структуры матрицы C.

3. Точность оценивания

Поскольку матрица C характеризует действие компонент вектора аномальных $f(t_m)$ на компоненты вектора наблюдения $\eta(t_m)$, то различным матрицам C будут соответствовать различные точности ФИЭ (среднеквадратические ошибки оценок).

Пусть ρ – булев вектор $\square$, в котором компоненты с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$ являются нулевыми, а остальные единичными. Под точностью оценивания $\vartheta_{(\rho)}(\tau_\mu)$ в момент времени τ_μ, соответствующей вектору ρ, будем понимать величину

$$\vartheta_{(\rho)}(\tau_\mu) = \mathrm{tr}\left[A\tilde{\Gamma}^{(\rho)}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu, \sigma_\Lambda)\right]$$

где A – произвольная симметричная неотрицательно определенная матрица, а $\tilde{\Gamma}^{(\rho)}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau, \sigma_\Lambda)$ – матрица вторых моментов ошибок, соответствующая вектору ρ. Очевидно, что $\vartheta_{(\rho)}(\tau_\mu)$ при $A = I_{(N+\Lambda+1)\nu}$ является среднеквадратической ошибкой ФИЭ, соответствующей ρ.

Замечание 1. Введением матрицы A в $\vartheta_{(\rho)}(\tau_\mu)$ задача обобщается в том смысле, что нас может интересовать не только совместная точность ФИЭ, но и раздельные точности фильтра, интерполятора и экстраполятора, то есть

$$\vartheta^0_{(\rho)}(\tau_\mu) = \mathrm{tr}\left[A_0\Gamma^{(\rho)}(\tau_\mu)\right],$$

$$\vartheta^N_{(\rho)}(\tau_\mu) = \mathrm{tr}\left[A_N\tilde{\Gamma}^{(\rho)}_N(\tilde{t}_N, \tau_\mu)\right],$$

$$\vartheta^\Lambda_{(\rho)}(\tau_\mu) = \mathrm{tr}\left[A_L\tilde{\Gamma}^\Lambda_{(\rho)}(\sigma_\Lambda, \tau_\mu)\right],$$

соответствующие вектору ρ. Это обеспечивается соответствующим конструированием A_0, A_N, A_L, неотрицательно определенных матриц соответствующих размеров.

Теорема 2. Пусть $I_{(0)}, I_{(1)}, \dots, I_{(\theta)}$ – вектора, последовательно отличающиеся друг от друга значением лишь одной компоненты. Если τ_μ – первый момент появления аномальной помехи, то имеет место свойство

$$\vartheta_{(\rho+1)}(\tau_\mu) \geq \vartheta_{(\rho)}(\tau_\mu), \; \rho = \overline{0; \theta - 1}.$$

Доказательство. Рассмотрим два вектора $I_{(\rho_1)}$ и $I_{(\rho_2)}$, отличающихся друг от друга значением лишь одной компоненты, т.е. $\rho_2 = \rho_1 + 1$. Этим векторам соответствуют матрицы $\square$ и $\square$ и, соответственно, $\tilde{\Gamma}^{(\rho_\iota)}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu, \sigma_\Lambda)$, $\iota = \overline{1; 2}$. Тогда доказательство Теоремы сводится к доказательству неравенства

$$\Delta\vartheta(\tau_\mu) = \vartheta_{(\rho_2)}(\tau_\mu) - \vartheta_{(\rho_1)}(\tau_\mu) \geq 0. \qquad (12)$$

Расписывая (П.79) из [1] с учетом (П.47), (2.33), (П.70) из [1] и (8) получаем

$$\tilde{\Gamma}^{(\rho_\iota)}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu, \sigma_\Lambda) = \tilde{\Gamma}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu - 0, \sigma_\Lambda) -$$
$$-\tilde{\Gamma}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu - 0, \sigma_\Lambda)\Gamma^T_{N+\Lambda+1}(\tau_\mu) \times$$
$$\times \Omega^{-1}(\tau_\mu)\left[I_\theta - X_\iota N_\iota^{-1}(\tau_\mu)X_\iota^T\Omega^{-1}(\tau_\mu)\right] \times$$
$$\times \Gamma_{N+\Lambda+1}(\tau_\mu)\tilde{\Gamma}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu - 0, \sigma_\Lambda),$$

где $N_\iota(\tau_\mu) = X_\iota^T\Omega^{-1}(\tau_\mu)X_\iota$, $\iota = \overline{1; 2}$. В (13) учтено, что $\tilde{\Gamma}^{(\rho_1)}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu - 0, \sigma_\Lambda) = \tilde{\Gamma}^{(\rho_2)}_{N+\Lambda+1}(\cdot) = \tilde{\Gamma}_{N+\Lambda+1}(\cdot)$, так как τ_μ – первый момент появления аномальной помехи. Тогда

$$\Delta\vartheta(\tau_\mu) = \mathrm{tr}\left[A\tilde{\Gamma}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu - 0, \sigma_\Lambda) \times \right.$$
$$\times \Gamma^T_{N+\Lambda+1}(\tau_\mu)\Omega^{-1}(\tau_\mu)\left[X_2N_2^{-1}(\tau_\mu)X_2^T - \right. \qquad (13)$$
$$\left. - X_1N_1^{-1}(\tau_\mu)X_1^T\right]\Omega^{-1}(\tau_\mu) \times$$
$$\left. \times \Gamma_{N+\Lambda+1}(\tau_\mu)\tilde{\Gamma}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu - 0, \sigma_\Lambda)\right].$$

Используя свойство $\mathrm{tr}[B_1B_2] = \mathrm{tr}[B_2B_1]$, (14) можно записать в виде

$$\Delta\vartheta(\tau_\mu) = \mathrm{tr}\left[L_{1,2}(t_m)L(t_m)W^{-1}(t_m)\right],$$

где $\Lambda(\tau_\mu) = \Gamma_{N+\Lambda+1}(\tau_\mu)\tilde{\Gamma}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu - 0, \sigma_\Lambda) \times A\tilde{\Gamma}_{N+\Lambda+1}(\tilde{t}_N, \tau_\mu - 0, \sigma_\Lambda)\Gamma^T_{N+\Lambda+1}(\tau_\mu)$, $\Lambda_{1,2}(\tau_\mu) = \left[X_2N_2^{-1}(\tau_\mu)X_2^T - X_1N_1^{-1}(\tau_\mu)X_1^T\right]\Omega^{-1}(\tau_\mu)$.

(14)

Так как $A \geq 0$, то $\Lambda(\tau_\mu) \geq 0$ [6]. Использование (9) при $X = X_2$ и $E = E_2$ дает, что $\Lambda_{1,2}(\tau_\mu) = I_\theta - (A_{12} + A_{21})$, где $A_{12} = \Omega(\tau_\mu) \times$

$\times E_2^T\left[E_2\Omega(\tau_\mu)E_2^T\right]^{-1}E_2$, $A_{21}=X_1N_1^{-1}(\tau_\mu)\times$ (15)
$\times X_1^T\Omega^{-1}(\tau_\mu)$. Как и при доказательстве Теоремы 1, получаем $\rho\kappa\left[A_{12}\right]=\theta-\rho_2$, $\rho\kappa\left[A_{21}\right]=\rho_1$. Так как $A_{12}^2=A_{12}$, $A_{21}^2=A_{21}$, то A_{12} и A_{21} – проекционные матрицы [5]. По построению матриц X_1 и E_2 имеем, что $E_2X_1=O$. Тогда $A_{12}A_{21}=O$, $A_{21}A_{12}=O$. Для проекционных матриц, которые удовлетворяют этому условию, матрица $A=A_{12}+A_{21}$ также является проекционной [5] и $\rho\kappa\left[A\right]=\rho\kappa\left[A_{12}\right]+\rho\kappa\left[A_{21}\right]=\theta-1$ так как $\rho_2=\rho_1+1$. Матрица $\Lambda_{1,2}(\tau_\mu)=I_\theta-A$ также является проекционной, так как $\left(I_\theta-A\right)^2==I_\theta-A$. Поскольку для проекционной матрицы ранг равен следу [5], то $\rho\kappa\left[\Lambda_{1,2}(\tau_\mu)\right]=$
$=\mathrm{tr}\left[\Lambda_{1,2}(\tau_\mu)\right]=\mathrm{tr}\left[I_\theta\right]-\mathrm{tr}\left[A\right]=\mathrm{tr}\left[I_\theta\right]-\rho\kappa\left[A\right]=\theta-$
$-(\theta-1)=1$. Пусть здесь и далее $\{\lambda_\iota(\Phi)\}$ $(\iota=1,2,\ldots)$ означает спектр матрицы Ф. Поскольку собственные числа проекционной матрицы равны либо 0, либо 1, а

$$\mathbf{rk}\left[\mathbf{L}_{1,2}(\mathbf{t}_m)\right]=\mathbf{tr}\left[\mathbf{L}_{1,2}(\mathbf{t}_m)\right]=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\left(\mathbf{L}_{1,2}(\mathbf{t}_m)\right)=1,$$

то $\{\lambda_\iota(\Lambda_{1,2}(\tau_\mu))\}=\{0,0,\ldots,1,0,\ldots0\}$ $\iota=\overline{1;\theta}$, то есть $\Lambda_{1,2}(\tau_\mu)\geq 0$. Так как $\Lambda(\tau_\mu)\geq 0$, $\Lambda_{1,2}(\tau_\mu)\geq 0$ и $\Omega^{-1}(\tau_\mu)\geq 0$, то [6] $\Lambda_{1,2}(\tau_\mu)\Lambda(\tau_\mu)\Omega^{-1}(\tau_\mu)\geq 0$, то есть

$$\lambda_i\left(L_{1,2}(t_m)L(t_m)W^{-1}(t_m)\right)\geq 0,\quad \iota=\overline{1;\theta}$$

Таким образом,

$$\Delta J(t_m)=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\left(L_{1,2}(t_m)L(t_m)W^{-1}(t_m)\right)\geq 0.$$

Теорема 2 доказана.

Поскольку теорема 2 предполагает, что τ_μ – первый момент появления аномальной помехи, то возникает вопрос о том, при каких условиях неравенство (12) будет справедливо, если снять данное ограничение.

Теорема 3. Пусть

$$\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L\right)\geq$$
$$\geq\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L\right),$$
$$\rho_2=\rho_1+1.$$

Тогда неравенство (12) справедливо для произвольного момента времени τ_μ.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы достаточно показать, что из неравенства $\Delta^\vartheta(\tau_\mu)\geq 0$, следующего из Теоремы 2, с учетом условия (16), записанного для момента времени $\tau_{\mu+1}$, будет следовать неравенство $\Delta^\vartheta(\tau_{\mu+1})\geq 0$

Матрица $\tilde{\Gamma}^{(\rho_2)}_{N+\Lambda+1}(\tilde{\tau}_N,\tau_{\mu+1}-0,\sigma_\Lambda)$ с учетом (16) может быть представлена в виде $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,$ $t_{m+1}-0,\tilde{s}_L)=\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L)+\tilde{\Gamma}$, где (16)
$\tilde{\Gamma}\geq 0$ [3]. Тогда из (2.37) в [1] следует

$$W_{(r_2)}(t_{m+1})=W_{(r_1)}(t_{m+1})+$$
$$+G_{N+L+1}(t_{m+1})\tilde{\Gamma}G^T_{N+L+1}(t_{m+1}).$$

Из (П.79) и (П.47) в [1], получаем

$$\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L\right)=\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)-$$
$$-\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)\times$$
$$\times G^T_{N+L+1}(t_{m+1})W^{-1}_{(r_1)}(t_{m+1})\left[I_q-C_iY(t_{m+1})\right]\times$$
$$\times G_{N+L+1}(t_{m+1})\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{t}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right).$$

Записывая (8), (9) для $\square$ и соответствующей $\square$ и используя эти соотношения в (18) с учетом (2.33), (П.70) из [1] и представления $\square(\square)$ из (6), получаем

$$\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L\right)=\Big[I_{(N+L+1)n}-\qquad(17)$$
$$-\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)G^T_{N+L+1}(t_{m+1})\times$$
$$\times E_i^T\left[E_iW_{(r_1)}(t_{m+1})E_i^T\right]^{-1}E_iG_{N+L+1}(t_{m+1})\Big]\times$$
$$\times\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right).$$

Полагая $\square=\square$ в (19) с учетом (17) получаем окончательное выражение для $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,\ t_{m+1},\tilde{s}_L\right)$ (18)
в виде

$$\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L\right)=\Big[I_{(N+L+1)n}-$$
$$-\left(\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)+\tilde{\Gamma}\right)G^T_{N+L+1}(t_{m+1})\times$$
$$\times E_2^T\Big[E_2W_{(r_1)}(t_{m+1})E_2^T+E_2G_{N+L+1}(t_{m+1})\times$$
$$\times\tilde{\Gamma}G^T_{N+L+1}(t_{m+1})E_2^T\Big]^{-1}E_2G(t_{m+1})\Big]\times$$
$$\times\left(\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)+\tilde{\Gamma}\right)$$

Г

$$\Phi(\alpha)=\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)+\tilde{\Gamma}\alpha$$

(19)
скалярного переменного $\alpha\geq 0$. Рассматривая мат-

рицу $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L)$ как функцию α, из (20) получаем

$$\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L; \alpha) = \left[I_{(N+L+1)n} - \Phi(\alpha) G^T_{N+L+1}(t_{m+1}) E_2^T \times \left[E_2 \Omega_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T + \alpha E_2 G_{N+L+1}(t_{m+1}) \tilde{\Gamma} G^T_{N+L+1}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} \times E_2 G_{N+L+1}(t_{m+1})\right] \Phi(\alpha). \quad (20)$$

Использование формулы дифференцирования обратной матрицы в (21) дает

$$d\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L; \alpha) / d\alpha = B \tilde{\Gamma} B^T,$$

где

$$B = I_{(N+1)n} - \Phi(\alpha) G^T_{N+L+1}(t_{m+1}) E_2^T \times \left[E_2 \Omega_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T + \alpha E_2 G_{N+L+1}(t_{m+1}) \tilde{\Gamma} G^T_{N+L+1}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} \times E_2 G_{N+L+1}(t_{m+1}).$$

Так как $\tilde{\Gamma} \geq 0$, то из (22) следует, что [6],

$$\partial \tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\cdot; \alpha) / \partial \alpha \geq 0, \quad (21)$$

то есть $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\cdot; \alpha)$ – монотонно неубывающая по α в смысле определенности матрица. Тогда

$$\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L; \alpha)\Big|_{\alpha=1} \geq \tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L; \alpha)\Big|_{\alpha=0}. \quad (22)$$

Согласно (20), (21) $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L) = \tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L; \alpha)\Big|_{\alpha=1}$, отсюда, из (21), (23) следует

$$\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L) \geq \Psi,$$

где

$$\Psi = \left[I_{(N+L+1)n} - \tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1} - 0, \tilde{s}_L) \times G^T_{N+L+1}(t_{m+1}) E_2^T \left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} \times E_2 G_{N+L+1}(t_{m+1})\right] \tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1} - 0, \tilde{s}_L). \quad (23)$$

Из (9) для X_1, E_1, $\Omega_{(r_1)}$ в момент времени t_{m+1} следует

$$E_1^T \left[E_1 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_1^T\right]^{-1} E_1 = W^{-1}_{(r_1)}(t_{m+1}) \times \left[I_q - C_1 N_1^{-1}(t_{m+1}) C_1^T W^{-1}_{(r_1)}(t_{m+1})\right].$$

Отсюда получаем

$$E_1^T \left[E_1 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_1^T\right]^{-1} E_1 - E_2^T \left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} E_2 = W^{-1}_{(r_1)}(t_{m+1}) \left[I_q - \left[W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T \times \left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} E_2 + C_1 N_1^{-1}(t_{m+1}) C_1^T W^{-1}_{(r_1)}(t_{m+1})\right]\right]. \quad (24)$$

Аналогично доказательству свойств $\Lambda_{1,2}(t_{m}) \geq 0$ и $\Lambda_{1,2}(t_m) \Lambda(t_m) \Omega^{-1}(t_m) \geq 0$ в предыдущей теореме может быть доказано, что

$$\Lambda_{1,2}(t_{m+1}) = I_q - \left[\Omega_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T \times \left[E_2 \Omega_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} E_2 + X_1 N_1^{-1}(t_{m+1}) X_1^T \Omega^{-1}_{(r_1)}(t_{m+1})\right] \geq 0.$$

Тем самым, согласно (25)

$$E_1^T \left[E_1 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_1^T\right]^{-1} E_1 - E_2^T \left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} E_2 \geq 0.$$

Полагая $\tilde{\Gamma} = \Psi$, получаем из (19), (26) с учетом вида для Ψ, что

$$\Psi - \tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L) = \tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1} - 0, \tilde{s}_L) G^T_{N+L+1}(t_{m+1}) \times \left[E_1^T \left[E_1 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_1^T\right]^{-1} E_1 - E_2^T \left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} E_2\right] \times G_{N+L+1}(t_{m+1}) \tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1} - 0, \tilde{s}_L) \geq 0. \quad (25)$$

Тогда из (24), (27) следует $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\cdot) \geq \tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\cdot)$. Поскольку $A \geq 0$, то [6]

$$\lambda_j \left(A \left[\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\cdot) - \tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\cdot)\right]\right) \geq 0, \quad j = \overline{1; (N+L+1)\nu}. \quad (26)$$

Из определения $\Delta^{\vartheta}(t_{m+1})$ имеем, что

$$\Delta^{\vartheta}(t_{m+1}) = \mathrm{tr}\left[A \left[\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\cdot) - \tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\cdot)\right]\right].$$

Тогда

$$\Delta J\left(t_{m+1}\right)= = \sum_{j=1}^{(N+L+1)n} \lambda_j \left(A\left[\tilde{\Gamma}_{N+L+1}^{(r_2)}(\cdot)-\tilde{\Gamma}_{N+L+1}^{(r_1)}(\cdot)\right]\right) \geq 0 . \quad (27)$$

Теорема 3 доказана.

Смысл приведенных результатов состоит в том, что добавление аномальных компонент вектора наблюдения к уже имеющимся аномальным компонентам может лишь ухудшить точность оценивания. В общем случае для двух векторов $I_{(r_1)}$ и $I_{(r_2)}$ таких, что $r_2 > r_1$, но набор нулевых компонент вектора $I^{(r_2)}$ не поглощает набор нулевых компонент векто[illegible] $I^{(\rho_1)}$ [illegible]чи[illegible] деленного о соотношении между $J_{(r_1)}(t_m)$ и $J_{(r_2)}(t_m)$ сказать нельзя.

Замечание 2. В соответствие с Замечанием 1 Теоремы 2 и 3 справедливы также и для раздельных задач фильтрации, интерполяции и экстраполяции.

4. Заключение

Для ФИЭ, синтез которого осуществлен в [1], доказаны следующие свойства:

– процедура исключения аномальных компонент вектора наблюдения является оптимальной;
– добавление аномальных компонент вектора наблюдения к уже имеющимся аномальным компонентам не улучшает качество оценивания;
– свойства ФИЭ, отмеченные выше, справедливы также и для раздельных задач фильтрации, интерполяции и экстраполяции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демин Н.С., Рожкова С.В. Непрерывно-дискретное оценивание стохастических процессов в случае наблюдений с памятью при наличии аномальных помех. Синтез // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 3. – С. 5–16.
2. Демин Н.С., Сушко Т.В., Яковлева А.В. Обобщенная обратная экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 48–59.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 576 с.
4. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
5. Абгарян К.А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. – М.: Наука, 1973. –432 с.
6. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М.: Наука, 1972. –232 с.